

基于Jupyter的python3

1 `import numpy as np` 数库

`arange` 排列 等距差

`x = np.arange(1, 11, 2)`

`>> array [1, 3, 5, 7, 9]` 不含尾数11

`linspace` 样空间 均分数据

`x = np.linspace(1, 11, 2)`

`>> array [1., 11.]` 均分两分, ^{含/不含尾数} `Endpoint = True`
`False`

`import matplotlib.pyplot as plt` 图库

`plot(x, y)` 绘图 `title('...')` 标题

`xlabel` `ylabel('...')` 横纵标

`grid()` 网格

`log.log()` 指数图 `semilogy()` y指数 x常数倍

`xlim` `ylim(10**a, 10**b)` 上下限显示
**表^指数

Neper frequency 内泊频率

Np/s 指衰减小

如 $3e^{-4t}$

$t=0$ 时 $y=3$

$t=\frac{1}{4}$ 时 $y=\frac{3}{e}$ 1个因子 $\frac{1}{e}$ 倍

Ae^{st}

故 $-\frac{1}{4} = -4$ Np/s

即 s 为内泊频率

$\text{step}(t)$ 的 $t=0$ undefined 非定义

2 信号

奇异函数 Singularity functions

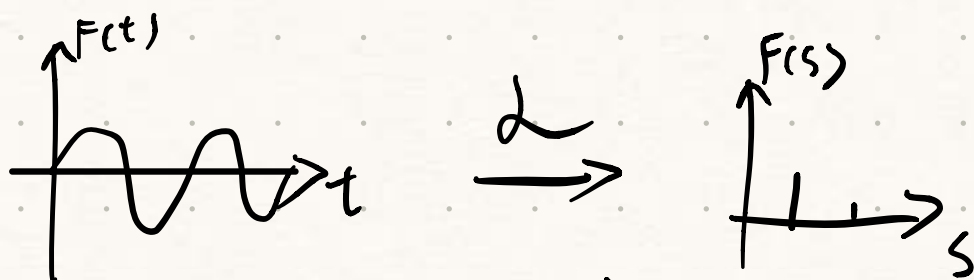
指数函数不连续或积/导后不连续部分

常见有 $u(t)$, $\delta(t)$, $r(t)$ 突然变化

拉普拉斯变换 $\mathcal{L}$ 时域 time domain $\rightarrow$ 频域 Frequency

$$\mathcal{L}(f(t)) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \rightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_0^{+\infty} F(s) e^{st} ds$$

一般用幅值图和符号图表示



$(t \geq 0)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
	$\delta(t)$	1
	$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

import sympy as sym 符号

定义变量 $t, y_t = \text{sym.symbols}('t y_t')$

"e" $\Rightarrow$ np.exp() $v_t = 9.81 * t$ 可直接写了

v_t 可直接打印函数

$\text{sym.laplace_transform}(v_t, t, s, \text{noconds}=\text{True})$
 例: 时 $\rightarrow$ 频 无条件

$\text{sym.inverse_laplace_transform}(v_s, s, t)$
 例: 频 $\rightarrow$ 时

Differentiation 微分

Integration 积分

时域求导 $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\quad} s \cdot F(s) - F(0)$

$s^2 F(s) - s f'(0) - f''(0)$

时域积分 $\int f(t) dt \xrightarrow{\quad} \frac{1}{s} \cdot F(s)$

且拉普拉斯仅适用单边信号 one-sided

3 传递函数

- 机械阻抗比为 $\frac{F}{v} = b$ 粘性阻力摩擦
(kg/s) ($\frac{mg}{v} = \frac{m}{s} \rightarrow kg/s$)

- import scipy.signal as sig
lti 系统, 用于表达 s 频域多项式

$$H(s) = \frac{ds^2 + es + \dots}{as^3 + bs^2 + cs + \dots}$$

输入分子
分母

$$\text{num} = [a, b, c]$$

$$\text{den} = [1, c, d, 0]$$

$$\text{得 } H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^3 + cs^2 + ds}$$

$$v_s = \text{sig.lti}(\text{num}, \text{den})$$

4.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}LI^2$$

系统残差 Residue

$$\text{假设 } I(s) = \frac{-0.4s + 25}{s(s + 100)}$$

$$= \frac{\overset{R_1}{0.25}}{s} + \frac{\overset{R_2}{-0.65}}{s+100} \text{ 分母几阶就几TR}$$

$$\text{已知 } H(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}} \dots$$

$$r = \text{sig.residue}(\text{num}, \text{den})$$

自然响应 natural response

$$\frac{A}{s(s+a)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+a}$$

(s+a) 部分

的留数 Residue R_2

的奇点 pole $s = -a$ NP/s (自然频率)

强制响应 force response

s 部分

的留数 Residue R_1

的奇点 pole $s = 0$ NP/s

$$\text{时间常数 } \tau = RC = \frac{L}{R}$$

系统线性 linearity 需满足

{ 齐次性 Homogeneity x, y 同倍放大缩小
可加性 Additivity 可以叠加仍保持
 $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2)$

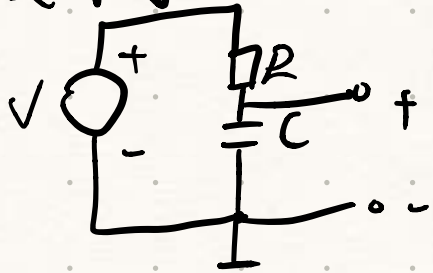
时不变性 Time invariance

输入延迟 t , 输出延迟 t , 系统不变

$H(s)$ 传递函数不能含初始条件

Transfer function can not include initial condition

对于 RC 电路



$$I = C \frac{du}{dt} \quad I_R = \frac{V}{R}$$

$$\therefore I(s) = C \cdot s \cdot V(s) \quad I_R(s) = \frac{V(s)}{R} \quad (\text{仍线性, 不变量})$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) V(s) = \frac{I(s)}{C}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{C \left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

$$I(s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{RC})}$$

怎么求留数

$$\text{num} = [A, B]$$

$$\text{den} = [1, C, 0]$$

$$\frac{As+B}{s(s+C)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+C}$$

$$r, p, k = \text{sigresidue}(\text{num}, \text{den})$$

$$\Rightarrow r = [R_0, R_1] \text{ 留数 residue}$$

$$p = [0, -a] \text{ 奇点 poles}$$

第二章

复数 j $x.real$ 实部 $x.imag$ 虚部

共轭 conjugate 即虚部异号

`np.conj(x)`

角度 `np.radians(a)` 转 rad

`np.degrees(a)` 转 a°

求角 `np.angle(x)` 默认 rad.

phasor method

用向量指代信号 做 $V_{out} = H(s) \cdot V_{in}$

例 $H(s) = \frac{c}{s^2 + as + b}$ 令 $s = j\omega$

$$\vec{V}_{out} = \frac{c}{s^2 + as + b} \cdot |V_{in}| \angle \alpha$$

$(d + ej)$

$\Rightarrow V_{out}$ 向量 $\rightarrow V_{out}$ 信号

波特图

沿用sig信号系统库
`import scipy.signal as sig`

$$\text{dB分贝} = 20 \lg |A|$$

自动生成函数H(s)波特图

`num = [...]`

`den = [...]`

`v_s = sig.Hi(num, den)`

`w, mag, angle = v_s.bode()`

`plt.plot(w, mag) 或 (w, angle)`

★定义自变量范围：
`w_u = np.linspace(1, 7, 1000)`
`w_b = 10**w_u`

`w, mag, angle = v_s.bode(w=w_b)`

滤波器 filter: RC/RL

Inductor

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

Resistor

$$V = IR$$

Capacitor

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

将这些关系变换到频域

$$V(s) = LsI(s)$$

$$V(s) = I(s)R$$

$$I(s) = CsV(s)$$

写出与频率相关的电压电流比

这实际上是传递函数 $\frac{V(s)}{I(s)}$ 对于每个电路元件

$$\frac{V(s)}{I(s)} = sL$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = R$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

我们将器件传递函数定义为阻抗 Z

$$Z = sL$$

$$Z = R$$

$$Z = \frac{1}{sC}$$

第三章

二阶求解 $as^2 + bs + c = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

阻尼 damping

无阻尼 no damping
 $b=0$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-4ac}$. 纯虚根

欠阻尼 under damped

$\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, 复数根

临界阻尼 critically damped

$\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, 两个相等实数根

过阻尼 over damped

$\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, 两个不同实数解

宽带 Bandwidth = 2 · real.poles

$$\text{品质因素 Quality} = \frac{|\omega_0|}{\text{Bandwidth}}$$

共振 resonant s 虚部 img $>$ 实部 real

状态变量系统 state variable systems

矩阵方程

$$H-s = \text{sig.lti}(A, B, C, D)$$

转换成矩阵 state space 形式

$$ss_s = H-s.\text{to_ss}()$$

转换成正常 H-s

$$H-s = ss_s.\text{to_tf}()$$

$$A \begin{bmatrix} : & : \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} : \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$D \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

求解 $sx = Ax + Bu$

$$x, y, z = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + D$$

例: 3个方程

$$\begin{aligned}x' &= -3x + 5y \\ y' &= 2x - 6y + 10u \\ z' &= 4x + y\end{aligned}$$

得

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u$$

$$x = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0]$$

$$y = [0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0]$$

$$z = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0]$$

C

D是0

对应每个C阵有不同HLS结果

$$X_s = \text{sig.lti}(A, B, C-x, D)$$

$$Y_s = \quad \quad \quad C-y$$

$$Z_s = \quad \quad \quad C-z$$

大足共轭

$\alpha = 0$, DC 直流

$$\alpha = \pm j\omega \quad \sin/\cos \text{ 1305}$$

$\alpha = 2$  $\alpha = -2$ 

B 频的信号采样, 采样频率 $f_s \geq 2B$
($T \leq \frac{1}{2B}$)

$$\text{离散}(t) = \frac{A}{2} z^k + \frac{A^*}{2} z^{*k}$$

$$Z = e^{\beta \cdot T_S}$$

$$z^k = e^{-st}$$

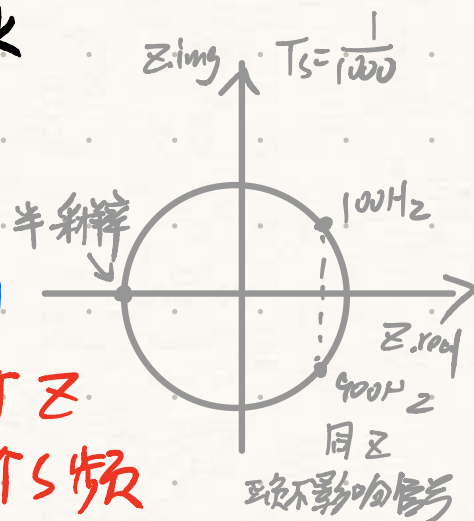
$$(K = \frac{t}{T_2})$$

$\begin{cases} s = j\omega \text{ 虚轴} \\ T_s \text{ 是采样周期} \end{cases}$

一个S仅有一个Z

一个子有多步频

$$S = \frac{\ln Z}{T_S}$$



Aliasing 混叠失真

Z 变换

$\delta[k]$	$\xrightarrow{z}$	1
$u[k]$	$\xrightarrow{z}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$r[k]$	$\xrightarrow{z}$	
a^k	$\xrightarrow{z}$	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$

$$\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{z}{z-a}$$

σ 是复频率数

$$z = e^{-\sigma \cdot T_s}, \quad z^k = e^{-\sigma T_s \cdot k} = e^{-\sigma \cdot t} \quad \text{where } k = \frac{t}{T_s}$$

$$\sigma = \frac{\ln a}{T_s} \quad (s = \frac{\ln z}{T_s})$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{5}{1-0.7 \cdot z^{-1}} \quad \text{Known } T_s = \frac{1}{800} \rightarrow \sigma \rightarrow e^{-\sigma t}$$

$$f(t) = 5 \cdot e^{\ln a \cdot \frac{1}{T_s} \cdot t} = 5 \cdot e^{\ln 0.7 \cdot 800 \cdot t}$$

$$1. f[k] = [0, 5, 10, 5, 0, -5, -10, -5]$$

$$\xrightarrow{Z} F(z) = 0 + 5z^{-1} + 10z^{-2} + 5z^{-3} + 0 - 5z^{-5} - 10z^{-6} - 5z^{-7}$$

$$2. f[k] = 5u[k]$$

$$\xrightarrow{Z} \frac{5}{1-z^{-1}} \text{ 或 } \frac{5z}{z-1}$$

$$3. f[k] = 15 \cdot e^{-0.2k}$$

$1 = 15 \cdot a^k$
 $(a = e^{-0.2} = 0.819)$

$$\xrightarrow{Z} f(z) = 15 \cdot \frac{z}{z - 0.819}$$

$$4. F(z) = \frac{-2jz}{z - 0.9 - 0.3j} + \frac{2jz}{z - 0.9 + 0.3j}$$

$$\xrightarrow{S} f[k] = -2j \cdot (0.9 + 0.3j)^k + 2j (0.9 - 0.3j)^k$$

$$5. \text{ sampling rate } f_s = 800 \text{ Hz and } F(z) = \frac{5z}{z - 0.7}$$

($T_s = \frac{1}{800}$)

$$\xrightarrow{S} f[k] = 5 \cdot 0.7^k = 5 \cdot e^{-s T_s k} = 5 \cdot e^{-st} \quad (t = k T_s)$$

$$\hookrightarrow 5 \cdot (e^{-\frac{s}{800}})^k$$

$$\text{得 } 0.7 = e^{-\frac{s}{800}}$$

$$\hookrightarrow s = -800 \cdot \ln 0.7$$

$$= -285.3$$

$$\Rightarrow 5 \cdot e^{-285.3 \cdot t}$$

$H_z = \text{sig.dlti}(\text{num}, \text{den}, \text{dt} = \frac{1}{f_s} \dots)$

描点 `plt.scatter(t, y-t)`

绘图 `plt.plot(t, y-t)`

$H_z = H_s.\text{to_discrete}(\text{dt} = \text{ , method} = \text{' '})$

不写默认 1

euler

backward-diff

bilinear

zoh 默认